Ferdowsi Civil Engineering, 36, 4, 2024. (123-146)



Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Ferdowsi Civil Engineering

Page Journal: civil-ferdowsi.um.ac.ir



Iranian Concrete Institute



Pavement Engineering Association of Iran

Quantitative Comparison of the Accuracy of the Third-Order Acceleration Method with Other Numerical Methods

Research Article

Masoud Mahmoodabadi [1], Fateme Hatefi[2], Fateme Ansari[3]

DOI: 10.22067/jfcei.2024.85785.1276

1. Introduction

The fundamental assumption of the third-order acceleration method is that the changes in acceleration over the time interval Δt are represented by a cubic polynomial. To quantitatively compare the error of this method with other numerical methods, a linear single-degree-of-freedom system was considered. Next, this system was subjected to a harmonic sinusoidal load with a specific frequency. Using second-order and third-order acceleration methods, as well as other numerical methods, the errors were quantitatively calculated and compared using the root mean square error (RMSE) criterion. In addition, cubic polynomials for error trends in terms of time step and damping were obtained, which showed a high correlation with the actual values.

2. Quantitative Comparison of the Error of Different Numerical Methods

In this section, to quantitatively compare the errors of different methods, a linear mass-spring-damper system with a frequency of 1 Hz was considered. The analytical response of this system to harmonic sinusoidal loading is available in structural dynamics textbooks. For this system, damping ratios of 1%, 2%, 5%, 10%, and 20% were considered. The harmonic loading frequency varied from 0.01 Hz to 3 Hz with an increment of 0.01 Hz. For 300 harmonic loadings, the RMSE was calculated for Δt values of 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, and 0.20 seconds. The number of points considered for calculating the RMSE criterion was 1001 points. For 12 methods, there are 50 data points for ten Δt values and five damping ratios. The average error for different Δt values and the average damping ratios for each method are defined as the average mean errors. In the bar chart shown in Figure 1, the average mean error values for different time steps are presented for the 12 methods mentioned in this article. At the top of the bar chart of each method, a number is shown in a box indicating the error ratio of the 0.2-second time step to the 0.02-second time step. The highest ratio is related to the enhanced Jennings method with a ratio of 19940, indicating the high sensitivity of this method to the time step. The lowest ratios are related to the Wilson-Theta method with a ratio of 3.946, indicating the low sensitivity of this method to the time step. For other methods, these ratios are two-digit numbers.

By calculating the average value of ten errors related to different time steps, the following results were obtained. The lowest error is related to the enhanced Jennings method with a ratio of 1, and the order of increasing error is as follows:

- Third-order acceleration method (Extended Unit Weighting Function) with an error ratio of 8.805
- Jennings method with an error ratio of 8.805
- Third-order acceleration method (Extended Petrov-Galerkin Weighting Function) with an error ratio of 8.819
- Third-order acceleration method (Extended Least Squares Weighting Function) with an error ratio of 8.819
- Second-order acceleration method (Unit Weighting Function) with an error ratio of 9.044
- Second-order acceleration method (Petrov-Galerkin Weighting Function) with an error ratio of 9.556
- Second-order acceleration method (Least Squares Weighting Function) with an error ratio of 9.556
- Newmark Method (Linear Acceleration) with an error ratio of 45.18

*Manuscript received December 9, 2023, Revised June 12, 2024, and Accepted, July 21, 2024.

[1] Corresponding author. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.
Email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

[2] MSc student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

[3] MSc student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

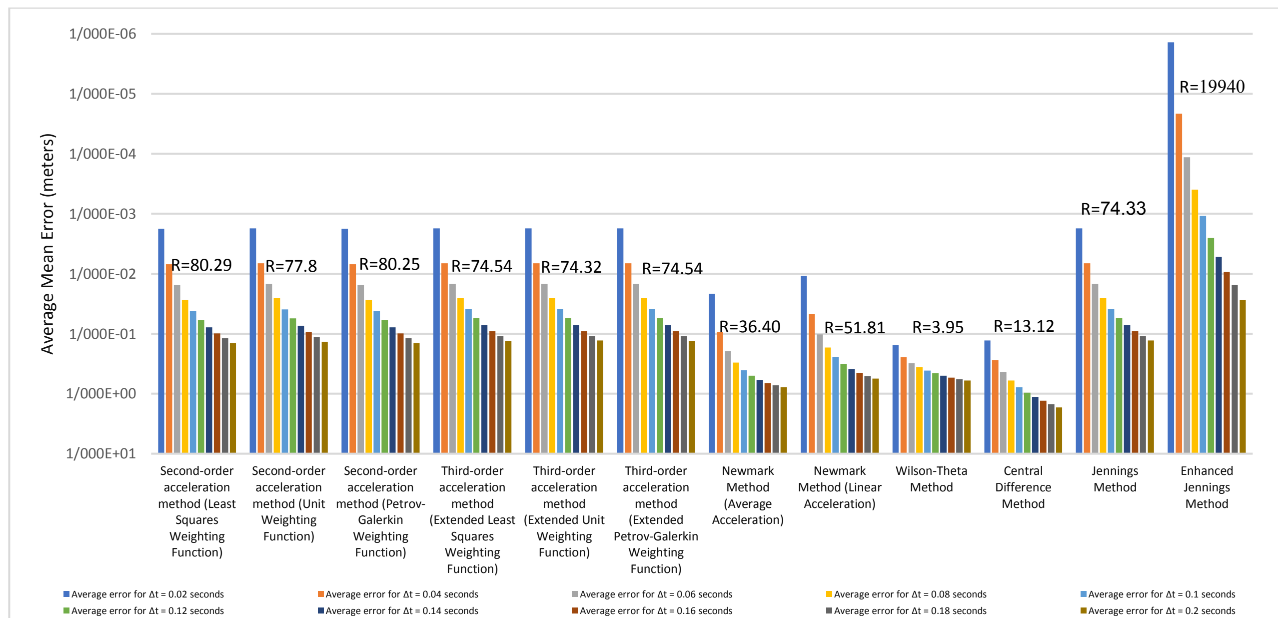


Figure 1: Average mean errors of different numerical methods for various damping ratios and Δt values from 0.02 seconds to 0.2 seconds

- Wilson-Theta Method with an error ratio of 67.19
- Newmark Method (Average Acceleration) with an error ratio of 69.16
- Central Difference Method with an error ratio of 142.7

3. Conclusion

In this article, the third-order acceleration method was extended using unit weighting functions, Petrov-Galerkin weighting functions, and least squares weighting functions. Subsequently, a single-degree-of-freedom system with a frequency of 1 Hz and damping ratios of 1%, 2%, 5%, 10%, and 20% was considered under harmonic loading. The harmonic loading frequency varied from 0.01 Hz to 3 Hz in increments of 0.01 Hz, and its analytical (exact) response was calculated. Afterwards, the response of this structure was calculated using the third-order acceleration method, second-order acceleration method, Newmark method (average acceleration method and linear acceleration method), Wilson method, central difference method, Jennings method, and enhanced Jennings method. The error for each method was calculated using the RMSE criterion. This was performed for ten Δt values, with the smallest being 0.02 seconds and the largest being 0.20 seconds. The results showed that the greatest error reduction in the third-order acceleration method compared to the second-order acceleration method occurred for a damping ratio of 1% and Δt = 0.2 seconds. The least error for all Δt values was related to the enhanced Jennings method.

Given that the analysis was conducted for ten time steps and five damping ratios, each method included fifty average errors. By averaging these fifty errors, the average of the average errors was obtained, with the smallest being related to the enhanced Jennings method and the largest to the central difference method. The Jennings method and the third-order acceleration method had approximately the same error, with their error ratio to the minimum error being about 8.8.

Finally, the error trends concerning time step and damping were examined, and cubic polynomial relationships were proposed that had a high correlation with their actual values.


انجمن مهندسی روسازی ایران


انجمن بتن ایران

مهندسی عمران فردوسی

https://civil-ferdowsi.um.ac.ir/



مقایسه کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی*

یادداشت پژوهشی

مسعود محمودآبادی (۱)　　فاطمه هاتفی اردکانی (۲)　　فاطمه انصاری (۳)

DOI: 10.22067/jfcei.2024.85785.1276

چکیده *فرض اساسی روش شتاب مرتبه ۳ این است که تغییرات شتاب در بازه زمانی Δt به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش‌های عددی، یک سیستم یک درجه آزاد خطی در نظر گرفته شد. سپس، به این سیستم بارگذاری هارمونیک سینوسی با فرکانس مشخص اعمال گردید. با استفاده از روش‌های عددی شتاب مرتبه دوم و نیز روش شتاب مرتبه سوم و روش‌های عددی دیگر و با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات، خطاهای روش‌های مختلف به صورت کمی محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شدند. همچنین، چندجمله‌ای‌هایی درجه ۳ برای روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بدست آمد که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی آن داشت.*

واژه های کلیدی روش شتاب مرتبه ۳، تابع وزنی، انتگرال باقیمانده وزن‌دار، انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، خطای جذر میانگین مربعات، برازش منحنی.

Quantitative Comparison of the Accuracy of the 3rd Order Acceleration Method with other Numerical Methods

Masoud Mahmoodabadi　　Fateme Hatefi　　Fateme Ansari

Abstract *The basic assumption of the 3rd order acceleration method is that the acceleration changes in the time interval Δt is in the form of a third degree polynomial. To quantitatively compare the error rate of this method with other numerical methods, a linear one-degree-of-freedom system was considered. Then, sinusoidal harmonic loading with a specific frequency was applied to this system. Using numerical methods of second-order acceleration and third-order acceleration and other numerical methods and using the root mean square criterion, the errors of different methods were quantitatively calculated and compared with each other. Also, 3rd degree polynomials were obtained for the trends of error changes in terms of time step and damping, which had a very good correlation with its real values..*

Key words 3rd order acceleration method, weighted function, weighted residual integral, direct time integration, root mean square error, curve fitting

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۹/۱۸و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۳/۴/۳۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۲) دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

(۳) دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

Email: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

مقدمه

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود بطوریکه روش‌های حل آن، به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های خطی، اگر پاسخ سازه در لحظه t موردنظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه [۰,t] به n زیر بازه تقسیم شده که معمولا طول این زیر بازه‌ها (Δt) را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها ($\Delta t = \frac{t}{n}$) خواص سازه مانند سختی ثابت بوده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود.

از بین روش های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک مرتبه تغییرات شتاب، حد اکثر بصورت خطی تغییر می‌کند. در مرجع [1]، مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابجایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد؛ تابع جابجایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقیمانده وزن‌دار از سه تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین و حداقل مربعات استفاده شد.

در مرجع [1] فرمولاسیون روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده‌است. در این مقاله تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد که این موضوع نوآوری این مقاله می‌باشد. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در مرجع [1] پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده‌است. نقصی که بنظر می‌رسد در مرجع [1] وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۱۲ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) برای ۳۰۰ فرکانس بارگذاری محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. به عبارت دیگر، با استفاده از پارامتر (کمیت) جذر میانگین مربعات، خطاهای روش‌های مختلف با یکدیگر به ازای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و ده گام زمانی مقایسه شده‌اند که منجر به حجم زیادی داده گردیده است. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه‌گیری های لازم انجام شده است. علاوه بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده-است.

غلامپور و همکاران [1]، یک روش باقیمانده وزن‌دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چندجمله‌ای جابجایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چندجمله‌ای محاسبه گردد. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آنها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابجایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام بدست آوردند و دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزندار و با چهار تابع وزنی ؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن بدست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ های بهتر و دقیق تری‌حاصل می-گردد.

چانگ (Chang)[2]، به بررسی روش صریح نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده‌است. او

اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می‌تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال‌گیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیرخطی لحظه‌ای، ویژگی‌های عددی روش صریح نیومارک رابه صورت تحلیلی موردارزیابی قرار داد. او بیان کرد که حد پایداری بالایی برای یک سیستم الاستیک خطی برابر با ۲ است، که این مقدار، اغلب در مقاومت سخت شدگی لحظه ای،کاهش پیدا می‌کند و در مقاومت نرم شدگی لحظه ای، افزایش پیدا می‌کند.

محمودآبادی و همکاران [4]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به صورت مقایسه‌ای مزیت ها و معایب روش جنینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند.

محمودآبادی و حسینی [5]، طیف‌های پاسخ غیرخطی شبه شتاب سیستم‌های الاستو پلاستیک با شکل پذیری ثابت با شتاب نگاشت السنترو که با روش درون یابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بود، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف‌های پاسخ غیر خطی برای شکل پذیری های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش های ۳ ,۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله به ترتیب روش های شتاب مرتبه ۲ ، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جنینگز و جنینگز ارتقاء یافته شرح داده شده است. در بخش ۸، یک سیستم یک درجه آزاد خطی تحت طیفی از بارگذاری های سینوسی با فرکانس‌های مختلف به روش های فوق الذکر، تحلیل گردیده است و خطای روش های مختلف با یگدیگر مقایسه شده اند. در پایان و در بخش۹، نتیجه گیری و پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \quad (۱)$$

که در این رابطه M، C و K به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است. P(t) نیروی وارده به سازه و y، $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب است. در روش شتاب مرتبه ۳، تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت یک چند جمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه، معادله تغییر مکان در هر گام زمانی بصورت یک تابع چند جمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که [illegible]:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (۲)$$

که در این رابطه a تا f شش ضریب ثابت مجهول هستند که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب بصورت روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (۳)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (۴)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابه‌جایی و سرعت و شتاب در ابتدای هرگام زمانی بدست می آید که به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$y(t = 0) = f = y_o \quad (۵)$$

$$\dot{y} \qquad = \dot{y}_o \quad (۶)$$

$$\ddot{y}(t = 0) = 2d = \ddot{y}_o \quad (۷)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M\,\ddot{y}_o + C\,\dot{y}_o + K\,y_o = P_o \quad (۸)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) و (۶) و (۷) در رابطه (۸) داریم:

$$M(2d) + C(e) + K(f) = P_o \rightarrow d = \frac{P_o - C.e - K.f}{2M} \quad (۹)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی بدست می‌آید.

$$M.\,\ddot{y}_{\Delta t} + C.\,\dot{y}_{\Delta t} + K.\,y_{\Delta t} = P_{\Delta t} \quad (۱۰)$$

$$M.(20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C.(5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = P_{\Delta t} \quad (۱۱)$$

همانطور که می دانیم در این روش عددی مانند روش‌های

کلاســیک دیگر، به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه [۰,t] بطور کامل ارضا نمی‌شود؛ در نتیجه یک تابع باقیمانده می‌توان تعریف کرد، بطوریکه [1]:

$$remainder = P - M\ddot{y} - C\dot{y} - Ky \quad (۱۲)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می‌کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (remainder)dt = 0 \quad (۱۳)$$

که در این رابطه، W_i تابع وزنی می باشـــد. برای یافتن ضرایب مجهول a، b و c توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسـخ در انتهای هر گام زمانی با اسـتفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (۱۴)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (۱۵)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (۱۶)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته شده و روابط فوق، مجددا برای گام بعدی استفاده می‌شود؛ بطوریکه در انتها پاسخ درلحظه مورد نظر بدست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات بصورت زیر تعریف می‌شوند:

تابع وزنی واحد بسط داده شده

در این حالت با استفاده از توابع وزنی $W_1=1$ و $W_2=t$ رابطه (۱۳) به صورت رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t}(remainder)dt = 0 \quad (۱۷)$$

$$\int_0^{\Delta t}t(remainder)dt = 0 \quad (۱۸)$$

حال با در نظر گرفتن همزمان معادلات (۱۱) و (۱۷) و (۱۸) مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

تابع وزنی پترو گالرکین بسط داده شده

در این روش سه تابع وزنی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_1 = t \text{ و } W_2 = t^2 \text{ و } W_3 = t^3 \quad (۱۹)$$

بنابراین با توجه به این دو تابع وزنی، رابطه (۱۳) به روابط زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t}t\,(remainder)dt = 0 \quad (۲۰)$$

$$\int_0^{\Delta t}t^2(remainder)dt = 0 \quad (۲۱)$$

$$\int_0^{\Delta t}t^3(remainder)dt = 0 \quad (۲۲)$$

در نتیجه مجهولات a و b و c با حل همزمان معادلات (۲۰) و (۲۱) و (۲۲) بدست می‌آیند.

تابع وزنی حداقل مربعات

مربع تابع باقیمانده بصورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$(remainder)^2 = \int_0^{\Delta t}[m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - P(t)]^2\,dt \quad (۲۳)$$

برای حداقل سازی این تابع باقیمانده، سه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial(remainder)^2}{\partial a} = 0 \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial(remainder)^2}{\partial b} = 0 \quad (۲۵)$$

$$\frac{\partial(remainder)^2}{\partial c} = 0 \quad (۲۶)$$

بنابراین با بکارگیری معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) در معادلات (۲۴) و (۲۵) و(۲۶)، داریم:

$$\int_0^{\Delta t}[m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)]\left(m\frac{\partial\ddot{y}(t)}{\partial a} + C\frac{\partial\dot{y}(t)}{\partial a} + K\frac{\partial y(t)}{\partial a}\right)dt = 0 \quad (۲۷)$$

$$\int_0^{\Delta t}[m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)]\left(m\frac{\partial\ddot{y}(t)}{\partial b} + C\frac{\partial\dot{y}(t)}{\partial b} + K\frac{\partial y(t)}{\partial b}\right)dt = 0 \quad (۲۸)$$

$$\int_0^{\Delta t}[m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)]\left(m\frac{\partial\ddot{y}(t)}{\partial c} + C\frac{\partial\dot{y}(t)}{\partial c} + K\frac{\partial y(t)}{\partial c}\right)dt = 0 \quad (۲۹)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۷) و (۲۸) و(۲۹)، مجهولات a و b و c محاسبه می‌شوند.

روش شتاب مرتبه ۲

در این روش شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شـــود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله ای درجه چهار بر حسب زمان است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [1] به طور کامل توضیح داده شده است.

روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است [۵]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می-شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار Δt، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای $\Delta t \leq ۰/۵۵۱T_n$ پایدار می‌باشد. روابط و فرمولاسیون این روش در مرجع [5] آمده است.

روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را ا صلاح نمود و آنرا با ا ضافه کردن پارامتری به نام θ به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر $۱ = \theta$ با شد، روش ویلسون، به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر $۱/۳۷ \leq \theta$ باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [5] مقدار $۱/۴۲ = \theta$ دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه θ استفاده شده‌است.

روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه‌جایی(یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح می‌باشد و پایدار مشروط است. یعنی اگر $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$ باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [5] آمده است.

روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک که بعضا در مراجع فنی فارسی از آن به روش جنینگز یاد می‌شود، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. در روش درونیابی خطی تحریک، همانطوریکه از اسم آن مشخص است، نقاط شتابنگاشت با پاره‌خط‌هایی به یکدیگر متصل می‌شوند؛ در نتیجه در محل اتصال پاره خط‌ها، شیب آنها لزوما با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. با توجه به اینکه درونیابی خطی تحریک، یکی از ساده‌ترین روش‌های درونیابی است؛ در نتیجه، اگر بازه‌های زمانی بین نقاط شتابنگاشت نسبت به دوره تناوب طبیعی سازه کوچک باشد، درونیابی خطی قابل قبول بوده و دارای دقت کافی می‌باشد. در مرجع [5]، ذکر گردیده است که به ازای $\Delta t = \frac{T_n}{10}$ نتایج نسبتا دقیقی به دست خواهد آمد. T_n دوره تناوب طبیعی ارتعاش سیستم یک درجه آزاد است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی، قابل استفاده است. در این روش، تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله Δt می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت معادله (۳۰) می‌باشد، بدون هیچگونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات شتاب پایه به صورت خطی در بازه Δt در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئنا به این صورت نیست [5].

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی جرم- فنر- میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (۳۰)$$

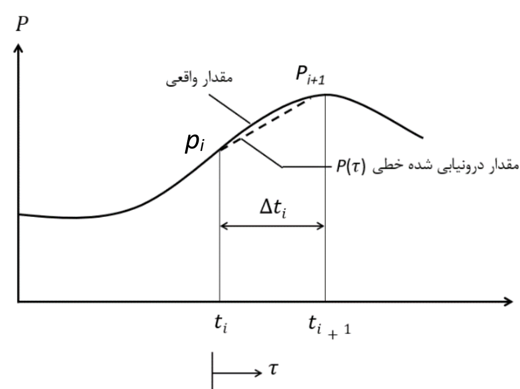
که در این معادله u و $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ به ترتیب مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب جرم m می‌باشند. در حالتی‌که بجای نیروی $p(t)$ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث، تحت اثر حرکت افقی زمین $u_g(t)$ قرار گرفته باشد، در مرجع [5] ثابت شده است که معادله (۳۰) به شکل زیر در می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (۳۱)$$

در معادله (۳۱)، u، $\dot{u}$ و $\ddot{u}$ به ترتیب مقادیر جابجایی نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی جرم m نسبت به زمین (تکیه‌گاه) می‌باشند و $\ddot{u}_g(t)$ نیز شتاب حرکت زمین است. شتاب حرکت زمین که بوسیله دستگاه‌های شتابنگار اندازه‌گیری می‌شود معمولا به صورت یک مجموعه اعداد می‌باشند که به فواصل زمانی مشخص Δt از یکدیگر قرار دارند. به عنوان مثال، فواصل زمانی بین نقاط شتابنگاشت‌های ال‌سنترو، ناغان و طبس برابر با ۰/۰۲ ثانیه می‌باشد.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۳۰) یا (۳۱) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض

تغییرات خطی تابع تحریک $p(t)$ است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱ نمادهای مورد استفاده در درونیابی خطی تحریک [5]

تابع تحریک $p(\tau)$ در بازه زمانی $t_i \le t \le t_{i+1}$ را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب τ به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau \quad (۳۲)$$

که در آن $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ می‌با شد و متغیر τ از صفر تا Δt_i تغییر می‌کند. پاسخ $u(\tau)$ سیستم یک درجه آزاد مورد بحث در بازه زمانی $0 \le \tau \le \Delta t_i$ حاصل جمع سه قسمت است: (۱) ارتعاش آزاد تحت جابجایی اولیه u_i و سرعت اولیه $\dot{u}_i$ در $\tau = 0$، (۲) پاسخ به نیروی پله‌ای p_i با شرایط اولیه صفر و (۳) پا سخ به نیروی شیب‌دار $\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau$ با شرایط اولیه صفر. با جمع پا سخ‌های سه قسمت فوق‌الذکر، پا سخ $u(\tau)$ بد ست می‌آید. با جایگذاری $\tau = \Delta t_i$ در $u(\tau)$ و $\dot{u}(\tau)$، جابجایی u_{i+1} و سرعت $\dot{u}_{i+1}$ که به ترتیب جابجایی و سرعت جرم m در زمان t_{i+1} هـ ستند، بد ست می‌آید. جزئیات کار در مرجع [5] تو ضیح داده شده‌ا ست و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگ شتی زیر برای محاسبه u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ ارائه شده‌است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (۳۳)$$

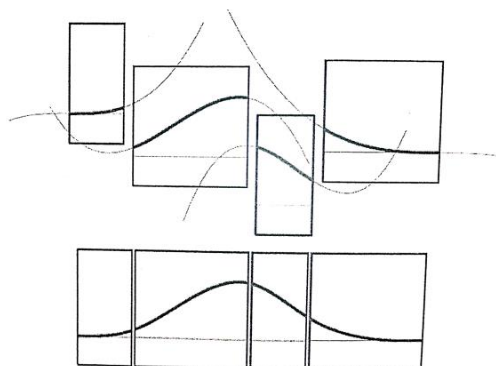
$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (۳۴)$$

مقادیر هشت ضریب A,B,C,…,D’ که در سمت راست روابط (۳۳) و (۳۴) وجود دارند، در مرجع [5] آورده شده‌اند. این ضرایب بستگی به پارامترهای ω_n، k و ζ، سیستم یک درجه آزاد دارند. همچنین، آنها وابسته به بازه زمانی $\Delta t \equiv \Delta t_i$ نیز هستند. لازم به ذکر است که $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$، $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ و $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ می‌باشد. همچنین، در حالتی که گام زمانی $\Delta t \equiv \Delta t_i$ ثابت باشد، کافی است که هشت ضریب A,B,C,…,D’ فقط یکبار محاسبه شوند.

هر گاه از درونیابی ا سپلاین مکعبی به جای درونیابی خطی ا ستفاده شو ر سمت را ست، ه د ه (۳ یک تابع تحریک درجه سه $p(t)$ در بازه زمانی $t_i \le t \le t_{i+1}$ به شکل زیر بر حسب τ وجود دارد:

$$p(\tau) = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau + d_i \quad (۳۵)$$

در رابطه (۳۵)، a_i، b_i، c_i و d_i ضرایب ثابتی هـ ستند که چگونگی محا سبه آنها در مرجع [3] تو ضیح داده شده‌ا ست. در حقیقت در روش جنینگز ارتقاء یافته در هر گام زمانی از یک چند جمله ای درجه ۳ بجای درونیابی خطی استفاده می‌شود. در شکل (۲) این چند جمله‌ای های درجه ۳ نشان داده شده‌اند. این منحنی ها موسوم به منحنی های اسپلاین هستند. در نقاط اتصال این منحنی‌ها، علاوه بر مقدار آنها شیب و مشتق دوم این منحنی ها نیز با یکدیگر برابر است.



شکل ۲ مفهوم منحنی های اسپلاین

حال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau + d_i \qquad t_i \le \tau \le t_{i+1} \quad (۳۶)$$

این معادله با فرض اینکه میرایی سیستم زیر، مقدار بحرانی باشد، یک جواب عمومی به شکل زیر دارد:

$$u_{general}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau}[A\cos\omega_D\tau + B\sin\omega_D\tau] \quad (۳۷)$$

در رابطه (۳۷)، A و B دو ضریب ثابت هستند. حل مکمل

یا خصوصی معادله دیفرانسیل (۳۷) با توجه به اینکه سمت راست این معادله یک تابع درجه سه بر حسب τ است را باید به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_p(\tau) = A'\tau^3 + B'\tau^2 + C'\tau + D' \qquad (۳۸)$$

که 'A، 'B ، 'C و 'D چهار ضریب ثابت هستند که مقادیر آنها به شرح زیر است:

$$A' = \frac{\cdots}{k} \qquad (۳۹)$$

$$B' = \frac{b_i - \frac{\cdots a_i}{k}}{k} \qquad (۴۰)$$

$$C' = \frac{\cdots_i}{k} - 6\frac{\cdots_i}{k^2} - \frac{2c(b \cdots \frac{3\cdots a_i}{k})}{k^2} \qquad (۴۱)$$

$$D' = \frac{\left[d_i - \frac{2m(b_j \cdots -3ca_i)}{k}\right]}{k} - \frac{c\left(c_i - \frac{6\cdots a_i}{k} - \frac{2c\left(b_i \cdots \frac{3\cdots a_i}{k}\right)}{k}\right)}{k^2} \qquad (۴۲)$$

با جمع جواب های عمومی و خصوصی معادلات (۳۷) و (۳۸)، جواب کل بدست می‌آید:

$$u_{total}(\tau) = u_{general}(\tau) + u_p(\tau) \qquad (۴۳)$$

$$u_{total}(\tau) = e^{-\zeta\omega_n\tau}[A\cos\omega_D\tau + B\sin\omega_D\tau] + A'^{\tau^3} + B'^{\tau^2} + C'\tau + D' \qquad (۴۴)$$

که ضرایب ثابت A و B با اعمال تغییرمکان و سرعت اولیه در ابتدای گام زمانی محاسبه می‌شوند.

مقایسه کمی روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

در این بخش برای مقایسه کمی خطاهای روش های مختلف، یک سیستم جرم- فنر - میراگر خطی با فرکانس ۱ هرتز در نظر گرفته شده است. پاسخ تحلیلی این سیستم در برابر بارگذاری هارمونیک سینوسی در کتب دینامیک سازه ها موجود می‌باشد. برای این سیستم، میرایی‌های ۱، ۲، ۱۰،۵و ۲۰درصد در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری هارمونیک از ۰/۰۱ هرتز تا ۳ هرتز با افزایش ۰/۰۱ در نظر گرفته شد و برای ۳۰۰ بارگذاری هارمونیک، مقدار جذر میانگین مربعات خطا برای Δtهای ۰/۰۲، ۰/۰۴، ۰/۰۶، ۰/۰۸، ۰/۱۰، ۰/۱۲، ۰/۱۴، ۰/۱۶، ۰/۱۸ و ۰/۲۰ ثانیه محاسبه گردید. تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای محاسبه معیار خطای جذر میانگین مربعات برابر با ۱۰۰۱ نقطه بود. در جدول شماره (۱) و (۲) مقادیر حداکثر خطا، حداقل خطا، میانگین خطا و انحراف معیار خطا، برای روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) و روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات) برای Δt =۰/۱۰ آورده شده است. با دقت در این جداول مشاهده می‌شود که مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه سوم برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۵/۲۹۸×۱۰$^{-۲}$، ۴/۵۹۲×۱۰$^{-۲}$، ۳/۷۸۰×۱۰$^{-۲}$، ۳/۲۰۶×۱۰$^{-۲}$ و ۲/۶۳۸×۱۰$^{-۲}$ می‌باشند. همچنین، مشاهده می‌شود مقدار میانگین خطا در روش شتاب مرتبه دوم برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۶/۰۸۲×۱۰$^{-۲}$، ۴/۹۳۶×۱۰$^{-۲}$، ۳/۹۰۵×۱۰$^{-۲}$، ۳/۲۶۶×۱۰$^{-۲}$ و ۲/۶۶۶×۱۰$^{-۲}$ می‌باشند. با مقایسه مقادیر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم نسبت به مقادیر متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه دوم، مشخص می‌گردد که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۲/۸۹، ۶/۹۷، ۳/۲۰، ۱/۸۴ و ۱/۰۵ درصد کاهش خطا اتفاق افتاده است. مقدار میانگین کاهش خطا برای این پنج میرایی برابر با ۵/۱۹ درصد می‌باشد.

جدول ۱ مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییرشکل بر حسب تغییرشکل استاتیکی برای میرایی‌های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه – روش شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات – تابع تغییرمکان درجه ۵)

میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	۱/۰۰۵	۵/۳۹۶×۱۰$^{-۱}$	۲/۲۴۲×۱۰$^{-۱}$	۱/۱۴۰×۱۰$^{-۱}$	۵/۸۲۰×۱۰$^{-۲}$
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	۲/۳۴۸×۱۰$^{-۶}$	۲/۳۴۲×۱۰$^{-۶}$	۲/۳۴۱×۱۰$^{-۶}$	۲/۳۴۱×۱۰$^{-۶}$	۲/۳۴۱×۱۰$^{-۶}$
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	۵/۲۹۸×۱۰$^{-۲}$	۴/۵۹۲×۱۰$^{-۲}$	۳/۷۸۰×۱۰$^{-۲}$	۳/۲۰۶×۱۰$^{-۲}$	۲/۶۳۸×۱۰$^{-۲}$
انحراف معیار خطا	۱/۰۲۴×۱۰$^{-۱}$	۷/۰۳۸×۱۰$^{-۲}$	۴/۰۳۵×۱۰$^{-۲}$	۲/۵۱۷×۱۰$^{-۲}$	۱/۵۲۱×۱۰$^{-۲}$

جدول ۲ مقادیر حداکثر، حداقل، میانگین و انحراف معیار جذر میانگین مربعات خطای پاسخ تغییرشکل بر حسب تغییرشکل استاتیکی برای میرایی‌های مختلف برای Δt برابر با ۰/۱۰ ثانیه– روش شتاب مرتبه دوم (روش حداقل مربعات – تابع تغییرمکان درجه ۴)

میرایی	۱ درصد	۲ درصد	۵ درصد	۱۰ درصد	۲۰ درصد
حداکثر خطا	۱/۷۰۶	$۷/۴۸۱\times ۱۰^{-۱}$	$۲/۶۰۹\times ۱۰^{-۱}$	$۱/۲۳۴\times ۱۰^{-۱}$	$۶/۰۴۸\times ۱۰^{-۲}$
بتای مربوط به حداکثر خطا	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۴
حداقل خطا	$۳/۹۷۲\times ۱۰^{-۵}$	$۱/۴۳۸\times ۱۰^{-۵}$	$۴/۳۰۶\times ۱۰^{-۶}$	$۲/۶۵۸\times ۱۰^{-۶}$	$۲/۳۶۴\times ۱۰^{-۶}$
بتای مربوط به حداقل خطا	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱
میانگین خطا	$۶/۰۸۲\times ۱۰^{-۲}$	$۴/۹۳۶\times ۱۰^{-۲}$	$۳/۹۰۵\times ۱۰^{-۲}$	$۳/۲۶۶\times ۱۰^{-۲}$	$۲/۶۶۶\times ۱۰^{-۲}$
انحراف معیار خطا	$۱/۵۰۹\times ۱۰^{-۱}$	$۸/۸۱۶\times ۱۰^{-۲}$	$۴/۴۸۱\times ۱۰^{-۲}$	$۲/۶۶۷\times ۱۰^{-۲}$	$۱/۵۶۶\times ۱۰^{-۲}$

در شکل های (۳) الی (۱۲) نمودار میله ای میانگین خطای روش های مختلف به ازای Δt=۰/۰۲ ثانیه تا Δt=۰/۲۰ ثانیه آورده شده است.

لازم به ذکر است محور قائم نمودارهای میله‌ای، لگاریتمی معکوس می‌باشند، به عبارتی دیگر میله‌ای که بیشترین ارتفاع را دارد، دارای کمترین خطا است و با توجه به اینکه جذر میانگین مربعات خطا به عنوان معیار خطا انتخاب گردیده است، در نتیجه تمام مقادیر خطا، اعدادی مثبت می‌باشند.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۳) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/۰۲ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

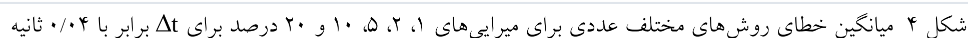
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۲/۴۷۱\times ۱۰^{-۳}$، $۲/۰۹۱\times ۱۰^{-۳}$، $۱/۶۶۲\times ۱۰^{-۳}$، $۱/۳۹۱\times ۱۰^{-۳}$ و $۱/۱۳۹\times ۱۰^{-۳}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۲/۵۴۳\times ۱۰^{-۳}$، $۲/۱۲۸\times ۱۰^{-۳}$، $۱/۶۷۶\times ۱۰^{-۳}$، $۱/۳۹۷\times ۱۰^{-۳}$ و $۱/۱۴۳\times ۱۰^{-۳}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۲/۸۳، ۱/۷۴، ۰/۸۴، ۰/۴۳ و ۰/ ۳۵ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۱/۲۴ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۱/۸۹۵\times ۱۰^{-۶}$، $۱/۵۸۳\times ۱۰^{-۶}$، $۱/۲۸۸\times ۱۰^{-۶}$، $۱/۴۰\times ۱۰^{-۶}$ و $۱/۰۱۸\times ۱۰^{-۶}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۱۸ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. مقادیر خطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد به ترتیب برابر با $۳/۷۶۴\times ۱۰^{-۱}$ و $۲/۲۶۲\times ۱۰^{-۱}$ می‌باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین‌خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی‌های فوق‌الذکر به ترتیب $۱/۲۲۷\times ۱۰^{-۱}$، $۱/۰۰۲\times ۱۰^{-۱}$ و $۷/۸۹۱\times ۱۰^{-۲}$ می‌باشند. میانگین بیشینه‌ی‌خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۱/۸۰۹\times ۱۰^{-۱}$ است که این میانگین ۱۰۳ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۳ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۲ ثانیه



شکل ۴ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۴ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۴) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/۰۴ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند. برای میرایی ۱۰ و ۲۰ درصد مقادیر خطای دو روش مذکور تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده، تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۹/۲۸۱\times۱۰^{-۳}$، $۷/۹۰۶\times۱۰^{-۳}$، $۶/۴۲۳\times۱۰^{-۳}$، $۵/۴۳۴\times۱۰^{-۳}$ و $۴/۴۸۰\times۱۰^{-۳}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۹/۹۱۳\times۱۰^{-۳}$، $۸/۱۸۶\times۱۰^{-۳}$، $۶/۵۲۴\times۱۰^{-۳}$، $۵/۴۸۳\times۱۰^{-۳}$ و $۴/۵۰۳\times۱۰^{-۳}$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۲/۸۳، ۱/۷۴، ۰/۸۴، ۰/۴۳و۰/۳۵ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین

کمینه‌ی‌خطا برای تمام میرایی‌ها ۱/۲۴ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۲/۸۰۳\times۱۰^{-۵}$، $۲/۳۸۷\times۱۰^{-۵}$، $۲/۰۳۴\times۱۰^{-۵}$، $۱/۸۴۸\times۱۰^{-۵}$ و $۱/۶۷۹\times۱۰^{-۵}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۳۱۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. مقادیرخطای روش ویلسون برای میرایی ۱ و ۲ درصد، به ترتیب برابر با $۵/۷۵۴\times۱۰^{-۱}$ و $۳/۵۳۹\times۱۰^{-۱}$ می‌باشد که این مقادیر بیشترین میزان خطا در هشت روش مطرح شده در این تحقیق برای میرایی ۱ و ۲ درصد است. برای میرایی‌های ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد، روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را دارد که خطاهای مربوط به میرایی‌های فوق‌الذکر به ترتیب $۲/۵۲۷\times۱۰^{-۱}$، $۲/۰۴۲\times۱۰^{-۱}$ و $۱/۵۹۹\times۱۰^{-۱}$ می‌باشند. میانگین بیشینه‌ی‌خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۳/۰۹\times۱۰^{-۱}$ است که این میانگین ۴۶ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۵) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=۰/۰۶$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۲/۰۱۰\times۱۰^{-۲}$، $۱/۷۲۹\times۱۰^{-۲}$، $۱/۴۱۷\times۱۰^{-۲}$، $۱/۲۰۳\times۱۰^{-۲}$و $۹/۹۲۶\times۱۰^{-۳}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۲/۲۱۲\times۱۰^{-۲}$، $۱/۸۱۷\times۱۰^{-۲}$، $۱/۴۴۹\times۱۰^{-۲}$، $۱/۲۱۸\times۱۰^{-۲}$و $^{-۳}$ $۹/۹۹۸\times۱۰$ بود. با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۹/۱۳، ۴/۸۴، ۲/۲۱، ۱/۲۳و۰/۷۲ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۳/۶۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر $۱/۴۴۹\times۱۰^{-۴}$، $۱/۲۵۵\times۱۰^{-۴}$، $۱/۰۹۱\times۱۰^{-۴}$، $۱/۰۰۲\times۱۰^{-۴}$ و $۹/۱۷۲\times۱۰^{-۵}$ مشاهده گردید.این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۲۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطا ها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب $۷/۰۰۳\times۱۰^{-۱}$ ، $۵/۲۷۰\times۱۰^{-۱}$، $۳/۹۰۵\times۱۰^{-۱}$، $۳/۱۲۴\times۱۰^{-۱}$ و $۲/۴۳۰\times۱۰^{-۱}$است. میانگین بیشینه‌ی‌خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با $۳/۰۹\times۱۰^{-۱}$ است که این میانگین ۳۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۶) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=۰/۰۸$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

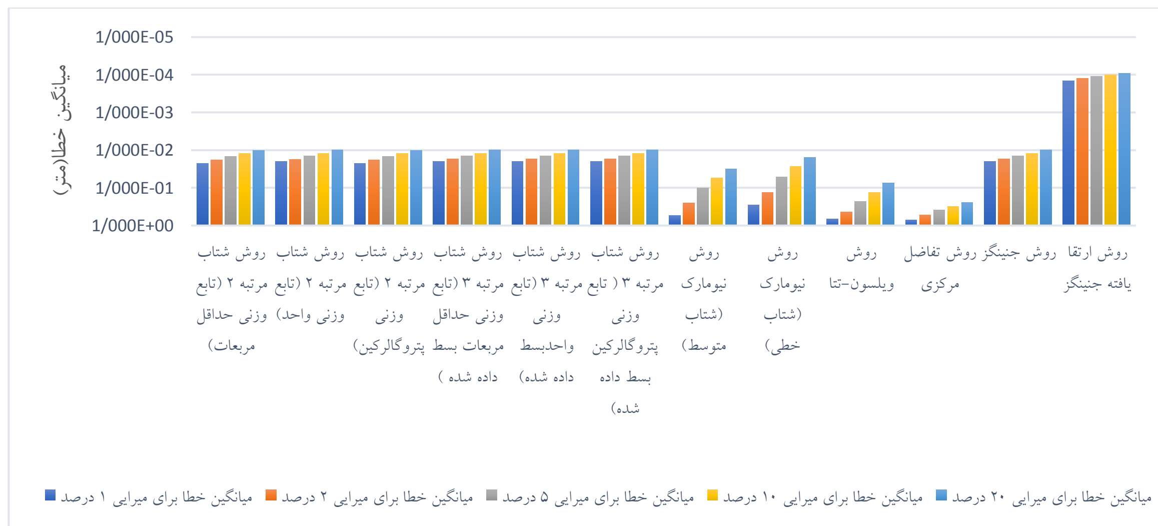
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۳/۴۷۵\times۱۰^{-۲}$، $۳/۰۰۵\times۱۰^{-۲}$، $۲/۴۷۲\times۱۰^{-۲}$، $۲/۰۹۹\times۱۰^{-۲}$ و $۱/۷۳۱\times۱۰^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این

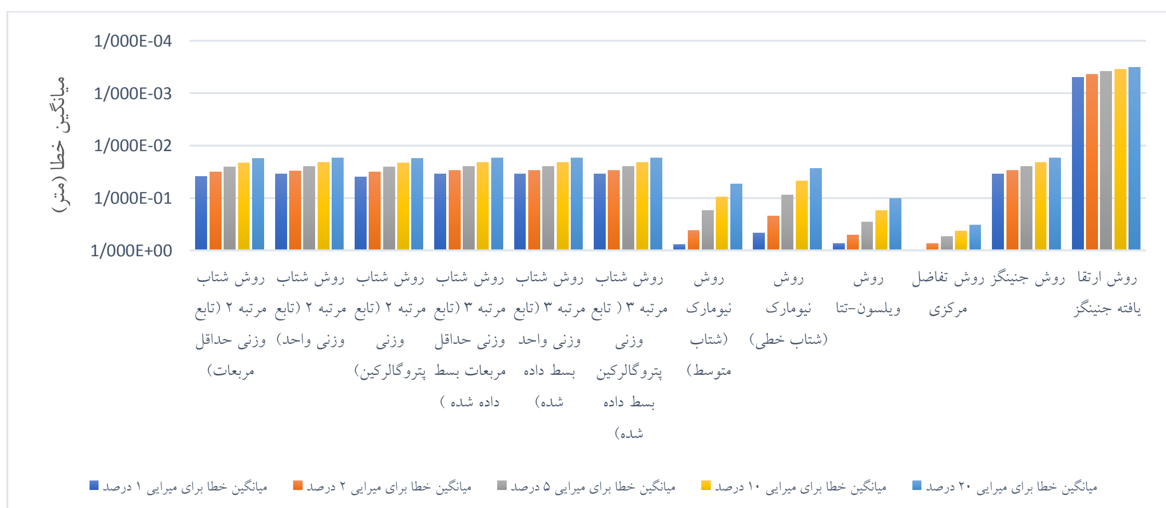
اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد ۳/۹۱۷×۱۰$^{-۲}$، ۳/۱۹۷×۱۰$^{-۲}$، ۲/۵۴۲×۱۰$^{-۲}$، ۲/۱۳۳×۱۰$^{-۲}$ و ۱/۷۴۷×۱۰$^{-۲}$ بود که با مقایسه این دو سری اعداد، مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب ۱۱/۲۸، ۶/۰۱، ۲/۷۵، ۱/۵۹و۰/۹۶ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۴/۵۲درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب مقادیر ۴/۹۴۸×۱۰$^{-۴}$، ۴/۳۱۷×۱۰$^{-۴}$، ۳/۷۸۵×۱۰$^{-۴}$، ۳/۴۹۵×۱۰$^{-۴}$ و ۳/۲۱۸×۱۰$^{-۴}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۶۹ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطا ها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۹/۹۳۵×۱۰$^{-۱}$، ۷/۳۹۸×۱۰$^{-۱}$، ۵/۳۷۱×۱۰$^{-۱}$، ۴/۲۵۶×۱۰$^{-۱}$ و ۳/۲۹۰×۱۰$^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی‌خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۳/۰۹×۱۰$^{-۱}$ است که این میانگین ۲۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۵ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۶ ثانیه



شکل ۶ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۰۸ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۷) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/۱ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین و نیز روش تابع وزنی واحد بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۵/۲۹۸×۱۰$^{-۲}$، ۴/۵۹۲ ×۱۰$^{-۲}$، ۳/۷۸۰×۱۰$^{-۲}$، ۳/۲۰۶×۱۰$^{-۲}$ و ۲/۶۳۸×۱۰$^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد ۶/۰۸۲×۱۰$^{-۲}$، ۴/۹۳۶ ×۱۰$^{-۲}$، ۳/۹۰۵ ×۱۰$^{-۲}$، ۳/۲۶۶×۱۰$^{-۲}$ و ۲/۶۶۶×۱۰$^{-۲}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب۱۲/۸۹، ۶/۹۷، ۳/۲۰، ۱/۸۴و۱/۰۵ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی‌خطا برای تمام میرایی‌ها ۵/۱۹ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای ۱/۳۵۲×۱۰$^{-۳}$، ۱/۱۷۹×۱۰$^{-۳}$، ۱/۰۳۵×۱۰$^{-۳}$، ۹/۵۷۴×۱۰$^{-۳}$ و ۸/۸۴۶×۱۰$^{-۳}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر۳۶ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۲۷۹، ۹/۶۶۵×۱۰$^{-۱}$، ۶/۹۳۳× ۱۰$^{-۱}$، ۵/۴۴۷×۱۰$^{-۱}$ و ۴/۱۸۸×۱۰$^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی‌خطا ، برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۷/۸۰۴×۱۰$^{-۱}$ است که این میانگین ۲۰ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۸) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/۱۲ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین بسط داده شده تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.
۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۷/۴۴۵×۱۰$^{-۲}$، ۶/۴۵۳ ×۱۰$^{-۲}$، ۵/۳۰۲×۱۰$^{-۲}$، ۴/۴۸۵×۱۰$^{-۲}$ و ۳/۶۷۶×۱۰$^{-۲}$ مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد ۸/۶۶۵×۱۰$^{-۲}$، ۶/۹۹۴ ×۱۰$^{-۲}$، ۵/۵۰۰ ×۱۰$^{-۲}$، ۴/۵۷۹×۱۰$^{-۲}$ و ۳/۷۲۰×۱۰$^{-۲}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب۱۴/۰۸، ۷/۷۳، ۳/۶۰، ۲/۰۵ و ۱/۱۸ درصد، معیار خطا کاهش یافته است. کمینه‌ی میانگین خطا برای تمام میرایی‌ها ۵/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.
۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای ۳/۲۰۷×۱۰$^{-۳}$، ۲/۷۷۳×۱۰$^{-۳}$، ۲/۴۱۶×۱۰$^{-۳}$، ۲/۲۳۲×۱۰$^{-۳}$ و ۲/۰۶۷×۱۰$^{-۳}$ مشاهده گردید.این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق-الذکر۲۲ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۵۳۹، ۱/۱۹۹، ۸/۵۹۵×۱۰$^{-۱}$، ۶/۷۰۸×۱۰$^{-۱}$ و ۵/۱۳۵×۱۰$^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی‌خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۹/۵۶۳×۱۰$^{-۱}$ است که این میانگین ۱۷ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۷ میانگین خطای روش های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱ ثانیه



شکل ۸ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۲ ثانیه



شکل ۹ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۴ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۹) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=۰/۱۴$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

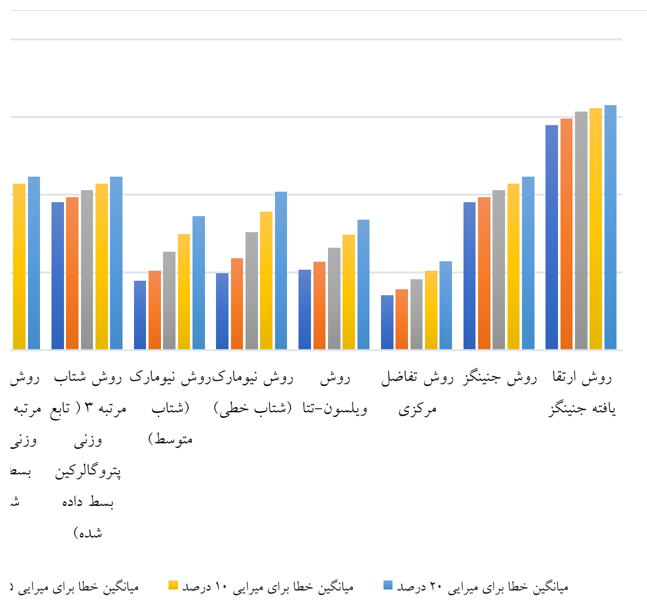
۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین مقادیر خطای دو روش مذکور تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۹/۸۶۸\times۱۰^{-۲}$، $۸/۵۳۴\times۱۰^{-۲}$، $۶/۹۷۹\times۱۰^{-۲}$، $۵/۸۷۷\times۱۰^{-۲}$ و $۴/۷۹۲\times۱۰^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱/۱۶۰\times۱۰^{-۱}$، $۹/۳۱۰\times۱۰^{-۲}$، $۷/۲۶۶\times۱۰^{-۲}$، $۶/۰۱۴\times۱۰^{-۲}$ و $۴/۸۵۴\times۱۰^{-۲}$ بودند که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب۱۴/ ۹۳، ۸/۳۳ ، ۴/۰۵، ۲/۲۸ و ۱/۲۸ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۱۷ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای $۶/۷۷۵\times۱۰^{-۳}$، $۵/۷۴۷\times۱۰^{-۳}$، $۴/۹۰۲\times۱۰^{-۳}$، $۴/۴۸۴\times۱۰^{-۳}$ و $۴/۱۴۸\times۱۰^{-۳}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۴ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۷۷۳، ۱/۴۲۹، ۱/۰۳۶، $۸/۰۵۹\times۱۰^{-۱}$ و $۶/۱۵۰\times۱۰^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۱۳ است که این میانگین ۱۶ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۱۰ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۶ ثانیه

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۰) و اعداد متناظر با آن که مربوط به $\Delta t=۰/۱۶$ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با $۱/۲۵۱\times۱۰^{-۱}$، $۱/۰۷۷\times۱۰^{-۱}$، $۸/۷۳۴\times۱۰^{-۲}$، $۷/۳۰۰\times۱۰^{-۲}$ و $۵/۹۰۹\times۱۰^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد $۱/۴۸۰\times۱۰^{-۱}$، $۱/۱۸۱\times۱۰^{-۱}$، $۹/۱۲۱\times۱۰^{-۲}$، $۷/۴۸۶\times۱۰^{-۲}$ و $۵/۹۹۴\times۱۰^{-۲}$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود

که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب۱۵/۴۷، ۸/۸۱، ۴/۲۴، ۲/۴۸و۱/۴۲ درصد، معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه‌ی‌خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۴۸ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای ۱/۲۸۳×۱۰$^{-۲}$، ۱/۰۵۴×۱۰$^{-۲}$، ۸/۶۱۰×۱۰$^{-۳}$، ۷/۶۸۱×۱۰$^{-۳}$ و ۷/۰۹۷×۱۰$^{-۳}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۱۰ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱/۹۹۰، ۱/۶۵۳، ۱/۲۲۴، ۹/۵۲۵×۱۰$^{-۱}$ و ۷/۲۶۲×۱۰$^{-۱}$ است میانگین بیشینه‌ی- خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۳۱ است که این میانگین ۱۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۱) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/ ۱۸ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء، میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۱/۵۳۴×۱۰$^{-۱}$، ۱/۳۱۰×۱۰$^{-۱}$، ۱/۰۴۹×۱۰$^{-۱}$، ۸/۶۷۲×۱۰$^{-۲}$ و ۶/۹۷۳×۱۰$^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد ۱/۸۲۱×۱۰^{۱}، ۱/۴۴۲×۱۰$^{-۱}$، ۱/۰۹۹×۱۰$^{-۱}$، ۸/۹۱۱×۱۰$^{-۲}$ و $^{-۲}$

۷/۰۸۰×۱۰ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب۱۵/۷۶، ۹/۱۵، ۴/۵۵، ۲/۶۸و۱/۵۱ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کاهش خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۷۳ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای ۲/۲۱۷×۱۰$^{-۲}$، ۱/۷۷۰×۱۰$^{-۲}$، ۱/۳۸۳×۱۰$^{-۲}$، ۱/۲۰۵×۱۰$^{-۲}$ و ۱/۱۴۱×۱۰$^{-۲}$ مشاهده گردید.این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر، ۷ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطا ها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۲/۲۰۴، ۱/۸۷۳، ۱/۴۲۵، ۱/۱۱۶ و ۸/۵۲۴×۱۰$^{-۱}$ است. میانگین بیشینه‌ی خطا برای پنج میرایی فوق‌الذکر برابر با ۱/۴۹۴ است که این میانگین ۱۴ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.

با دقت در نمودارهای میله‌ای شکل (۱۲) و اعداد متناظر با آن که مربوط به Δt=۰/ ۲ ثانیه می‌باشد، نتایج زیر قابل مشاهده است:

۱. با افزایش میزان میرایی، بدون استثناء میانگین خطای روش های مختلف کاهش می‌یابد.

۲. در روش شتاب مرتبه دوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۳ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

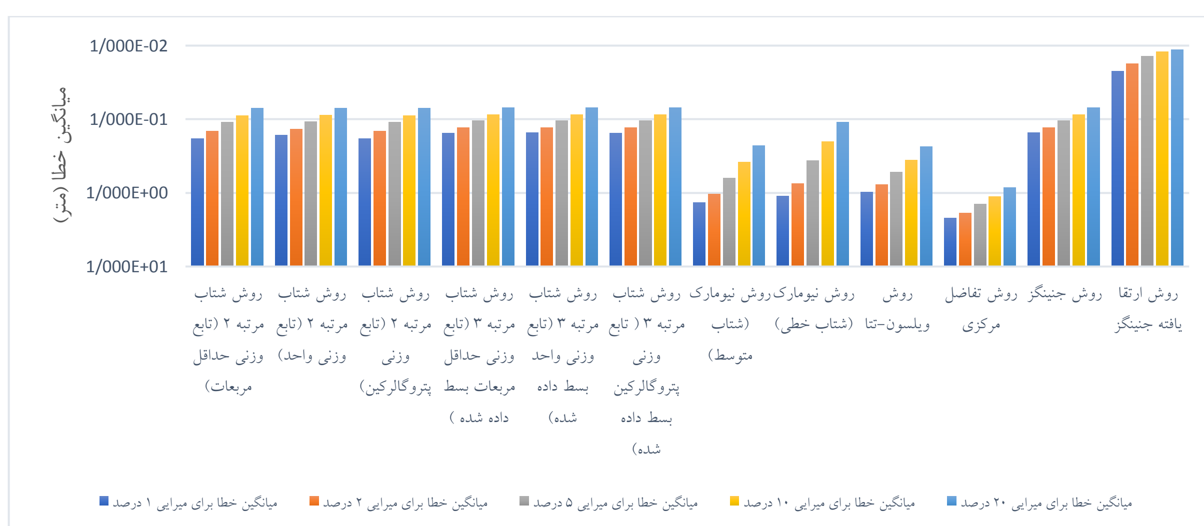
۳. در روش شتاب مرتبه سوم، مقادیر میانگین خطای روش حداقل مربعات و روش پتروگالرکین تا ۴ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند و با مقادیر میانگین خطای روش تابع وزنی واحد تا ۲ رقم اعشار دقیقا یکسان بودند.

۴. در روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) میانگین خطا برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد به ترتیب برابر با ۱/۸۵۱×۱۰$^{-۱}$، ۱/۵۷۱×۱۰$^{-۱}$، ۱۰$^{-}$ ۱/۲۴۷×^{۱}، ۱/۰۲۶×۱۰$^{-۱}$ و ۸/۲۹۵×۱۰$^{-۲}$ بود. مقادیر متناظر این اعداد برای روش شتاب مرتبه دوم به ترتیب اعداد ۱۰$^{-}$

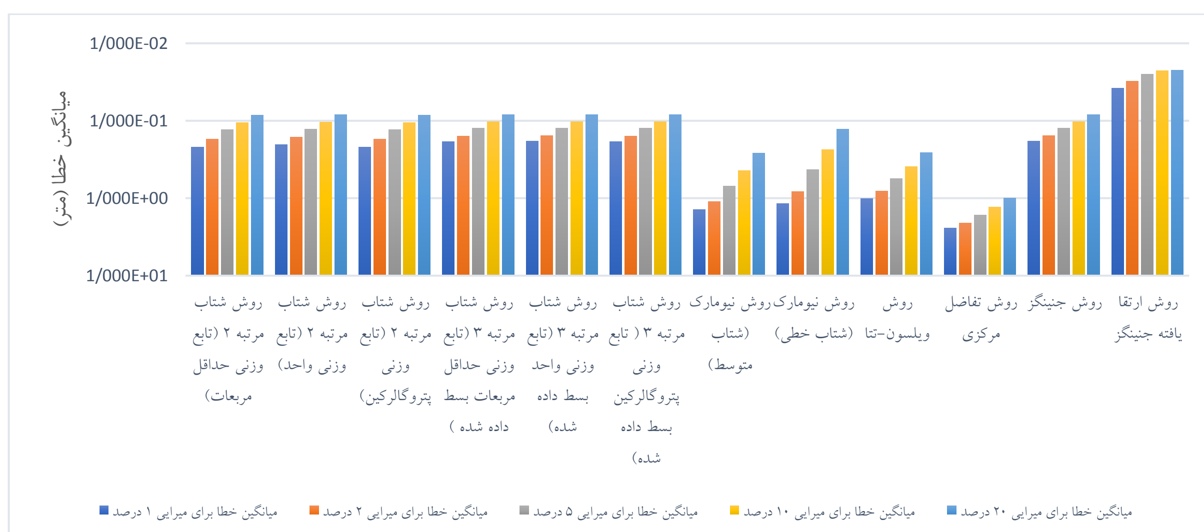
۲/۱۹۵×^{۱}، ۱/۷۳۲×۱۰$^{-۱}$، ۱/۳۰۹×۱۰$^{-۱}$، ۱/۰۵۶×۱۰$^{-۱}$ و ۸/۴۲۷×۱۰$^{-۲}$ که با مقایسه این دو سری اعداد مشخص می‌شود که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳ برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۱۵/۶۷۱، ۹/۲۹۵، ۴/۷۳۶، ۲/۸۴۰ و ۱/۵۶۶ درصد معیار خطا کاهش یافته است. میانگین کمینه خطا برای تمام میرایی‌ها ۶/۸۲۲ درصد می‌باشد که عدد کوچکی است.

۵. کمینه‌ی میانگین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته است که برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب خطاهای ۳/۷۶۹×۱۰$^{-۲}$، ۳/۰۷۱×۱۰$^{-۲}$، ۲/۴۹۱×۱۰$^{-۲}$، ۲/۲۵۲×۱۰$^{-۲}$ و ۲/۲۲۴×۱۰$^{-۲}$ مشاهده گردید. این مقادیر به مراتب کمتر از خطای روش شتاب مرتبه سوم می‌باشد. یعنی میانگین پنج عدد فوق‌الذکر ۵ برابر کمتر از میانگین پنج خطای مربوط به روش شتاب مرتبه سوم (روش کمترین مربعات) است.

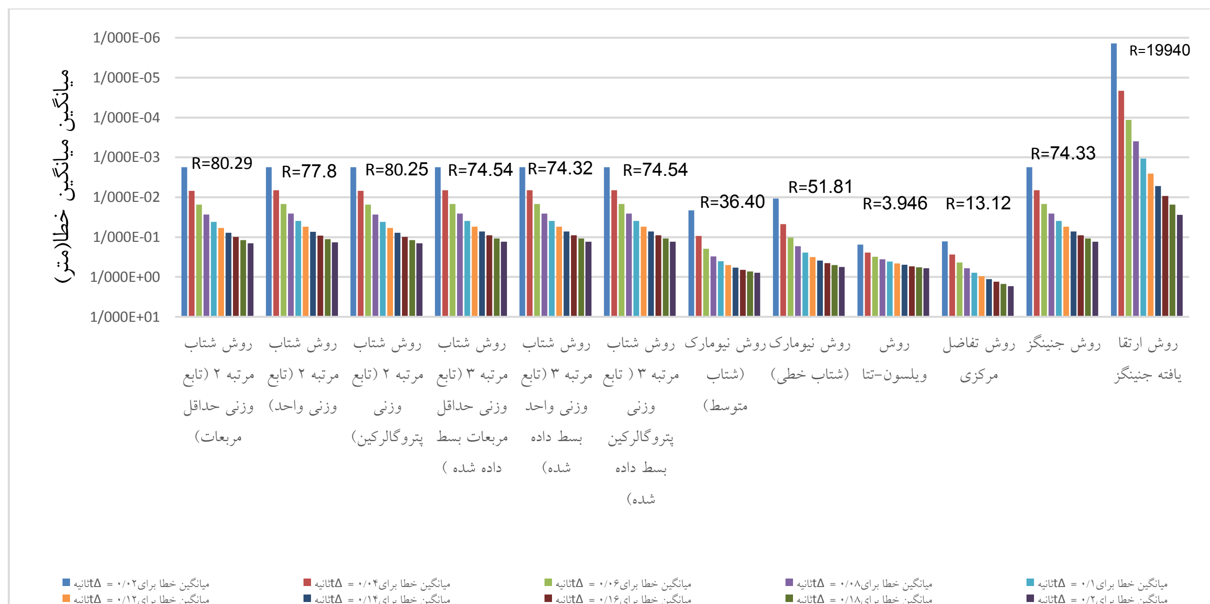
۶. روش تفاضل مرکزی، بیشینه‌ی میانگین خطا را در بین این هشت روش عددی داشته است که عدد مربوط به این خطاها برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ به ترتیب ۲/۴۳۰، ۲/۱۰۰، ۱/۶۴۴، ۱/۳۰۳ و ۱/۰۰۳ است. میانگین خطاهای حداکثر برای پنج میرایی فوق‌الذکر، برابر با ۱/۶۹۶ است که این میانگین ۱۳ برابر میانگین خطای شتاب مرتبه سوم (روش حداقل مربعات) است.



شکل ۱۱ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۱۸ ثانیه



شکل ۱۲ میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد برای Δt برابر با ۰/۲ ثانیه



شکل ۱۳ میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های مختلف و Δt برابر با ۰/۰۲ ثانیه تا ۰/۲ ثانیه

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل(۱۳)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب گام‌های زمانی مختلف، برای ۱۲ روش مذکور در این مقاله آورده شده‌است.در بالای نمودار میله‌ای هر روش،عددی در کادر درج گردیده‌است که بیانگر نسبت خطای گام زمانی ۰/۲ ثانیه به گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه است. بزرگترین این نسبت ها، مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته با نسبت ۱۹۹۴۰ است که حساسیت بسیار زیاد این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. کمترین نسبت ها مربوط به روش ویلسون-تتا با نسبت ۳/۹۴۶ است که حساسیت بسیار کم این روش را به گام زمانی نشان می‌دهد. برای سایر روش‌ها، این نسبت‌ها دو رقمی می‌باشد.

در جدول (۳) مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δtها‌ی مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای ۱۲ روش مطرح شده در این مقاله آورده شده‌است. همچنین در این جدول نسبت خطای هر روش به خطای روش جنینگز ارتقا یافته که حداقل خطا را دارا بوده است، آورده شده‌است. با دقت در نسبت های درج شده در این جدول، مشخص می‌گردد که کمترین خطا مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته با نسبت ۱ است و ترتیب افزایش خطا به صورت زیر می‌باشد:

۱. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) با نسبت خطای ۸/۸۰۵

۲. روش جنینگز با نسبت خطای ۸/۸۰۵

۳. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده) با نسبت خطای ۸/۸۱۹

۴. روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده) با نسبت خطای ۸/۸۱۹

۵. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد) با نسبت خطای ۹/۰۴۴

۶. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین) با نسبت خطای ۹/۵۵۶

۷. روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات) با نسبت خطای ۹/۵۵۶

۸. روش نیومارک (شتاب خطی) با نسبت خطای ۴۵/۱۸

۹. روش ویلسون-تتا با نسبت خطای ۶۷/۱۹

۱۰. روش نیومارک (شتاب متوسط) با نسبت خطای ۶۹/۱۶

۱۱. روش تفاضل مرکزی با نسبت خطای ۱۴۲/۷

در جدول(۴)، روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی آورده شده‌است. این روابط همگی چند جمله‌ای های درجه ۳ هستند که همبستگی بسیار مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، یک یا بسیار نزدیک به عدد یک است.

جدول ۳ مقادیر میانگین ده خطای مربوط به Δtهای مختلف (نمودار شکل ۱۳) برای ۱۲ روش مطرح شده در این مقاله

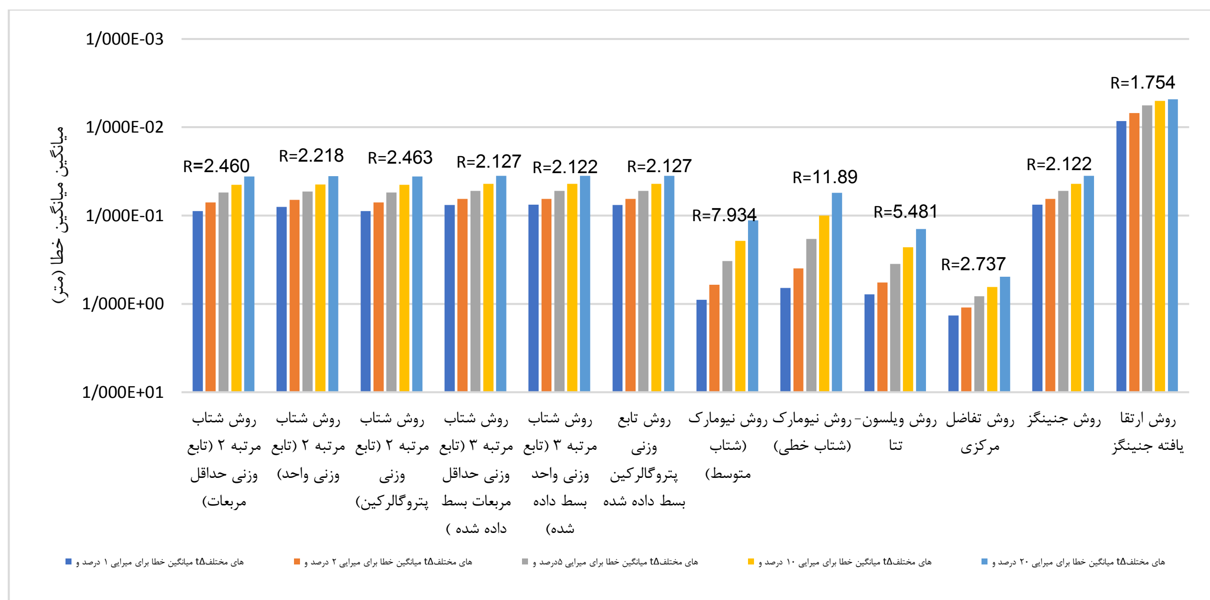
نام روش	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
میانگین خطا	۵/۹۰۲×۱۰$^{-۲}$	۵/۵۸۶×۱۰$^{-۲}$	۵/۹۰۲×۱۰$^{-۲}$	۵/۴۴۷×۱۰$^{-۲}$	۵/۴۳۸×۱۰$^{-۲}$	۵/۴۴۷×۱۰$^{-۲}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۹/۵۵۶	۹/۰۴۴	۹/۵۵۶	۸/۸۱۹	۸/۸۰۵	۸/۸۱۹
نام روش	روش نیومارک (شتاب متوسط)	روش نیومارک (شتاب خطی)	روش ویلسون-تتا	روش تفاضل مرکزی	روش جنینگز	روش ارتقا یافته جنینگز
میانگین خطا	۴/۲۷۲×۱۰$^{-۱}$	۲/۷۹۰×۱۰$^{-۱}$	۴/۱۵۰×۱۰$^{-۱}$	۸/۸۱۲×۱۰$^{-۱}$	۵/۴۳۹×۱۰$^{-۲}$	۶/۱۷۷×۱۰$^{-۳}$
نسبت خطا به حداقل خطا	۶۹/۱۶	۴۵/۱۸	۶۷/۱۹	۱۴۲/۷	۸/۸۰۵	۱/۰۰

جدول ۴ روابط مربوط به روند افزایش خطای روش‌های مختلف بر حسب گام زمانی ($\Delta t \equiv x$)

نام روش	فرمول روند افزایش خطا	R^2
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)	$y = -8.455x^3 + 5.5112x^2 - 0.056x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)	$y = -5.709x^3 + 4.5786x^2 - 0.0082x + 7\times10^{-5}$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)	$y = -8.5508x^3 + 5.5364x^2 - 0.0577x + 0.0008$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)	$y = -7.4838x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)	$y = -7.6257x^3 + 4.8839x^2 - 0.0244x + 0.0003$	۱/۰۰
روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)	$y = -7.4836x^3 + 4.8579x^2 - 0.0229x + 0.0003$	۱/۰۰
روش نیومارک (شتاب متوسط)	$y = -77.677x^3 + 19.107x^2 + 3.4805x - 0.0619$	۹/۹۹۶×۱۰$^{-۱}$
روش نیومارک (شتاب خطی)	$y = -75.7x^3 + 25.519x^2 + 0.787x - 0.0173$	۹/۹۹۸×۱۰$^{-۱}$
روش ویلسون-تتا	$y = 38.944x^3 - 19.474x^2 + 5.0517x + 0.0649$	۹/۹۹۲×۱۰$^{-۱}$
روش تفاضل مرکزی	$y = -7.5833x^3 + 8.0793x^2 + 7.2581x - 0.0233$	۹/۹۹۹×۱۰$^{-۱}$
روش جنینگز	$y = -7.6142x^3 + 4.8814x^2 - 0.0243x + 0.0003$	۱/۰۰
روش ارتقا یافته جنینگز	$y = 11.02x^3 - 2.161x^2 + 0.1376x - 0.0024$	۹/۹۶×۱۰$^{-۱}$

در نمودار میله‌ای نشان داده شده در شکل (۱۴)، مقادیر میانگین میانگین خطاها بر حسب میرایی‌های مختلف، برای ۱۲ روش مذکور در این مقاله آورده‌شده‌است.در بالای نمودار میله‌ای هر روش،عددی در کادر درج گردیده‌است که بیانگر نسبت خطای میرایی ۱ درصد به میرایی ۲۰ درصد است. بزرگترین این نسبت ها، مربوط به نیومارک (شتاب خطی) با نسبت ۱۱/۸۹ است که حساسیت نسبتا زیاد این روش را به میرایی نشان می‌دهد. کمترین نسبت ها مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته با نسبت ۱/۷۵۴ است که حساسیت اندک این روش را به میرایی نشان می‌دهد. در ۳ روش مطرح شده در این مقاله برای روش شتاب مرتبه ۳، نسبت‌های خطای دو روش یکسان بودند (عدد ۲/۱۲۷) و نسبت خطای روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده) در اعشار سوم متفاوت بود.(عدد ۲/۱۲۲)که این موضوع بیانگر حساسیت نه چندان زیاد روش شتاب مرتبه سه به مقدار میرایی است.

در جدول (۵)، روابط مربوط به روند کاهش خطای روش-های مختلف بر حسب میرایی آورده شده‌است. این روابط مانند روابط جدول(۴)، همگی چند جمله‌ای های درجه ۳ هستند که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی‌شان دارند؛ به طوری که ضریب R^2 آنها، بسیار نزدیک به عدد یک است اما دقت آنها کمی کمتر از روابط جدول (۴) می‌باشد.



شکل ۱۴ میانگین میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای میرایی‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰ و ۲۰ درصد و Δtهای مختلف

جدول ۵ روابط مربوط به روند کاهش خطای روش‌های مختلف بر حسب میرایی (بر حسب درصد)

R^2	فرمول روند افزایش خطا	نام روش
۹/۸۶۲×۱۰$^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1003$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی حداقل مربعات)
۹/۹۰۸×۱۰$^{-1}$	$y = -3 \times 10^{-5}x^3 + 0.001x^2 - 0.0115x + 0.0884$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی واحد)
۹/۸۶۱×۱۰$^{-1}$	$y = -4 \times 10^{-5}x^3 + 0.0014x^2 - 0.0154x + 0.1004$	روش شتاب مرتبه دوم (تابع وزنی پتروگالرکین)
۹/۹۴۳×۱۰$^{-1}$	$y = -2 \times 10^{-5}x^3 + 0.0008x^2 - 0.01x + 0.0836$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی حداقل مربعات بسط داده شده)
۹/۹۸۹×۱۰$^{-1}$	$y = 22.641x^3 - 2.5424x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی واحد بسط داده شده)
۹/۹۸۹×۱۰$^{-1}$	$y = 22.242x^3 - 2.4272x^2 - 0.4855x + 0.0863$	روش شتاب مرتبه سوم (تابع وزنی پتروگالرکین بسط داده شده)
۹/۹۸۲×۱۰$^{-1}$	$y = 469.9x^3 + 16.246x^2 - 17.567x + 1.2406$	روش نیومارک (شتاب متوسط)
۹/۹۸۳×۱۰$^{-1}$	$y = -80.96x^3 + 115.22x^2 - 20.364x + 1.0231$	روش نیومارک (شتاب خطی)
۹/۹۸۴×۱۰$^{-1}$	$y = 574.09x^3 - 42.496x^2 - 9.9897x + 0.9947$	روش ویلسون-تتا
۹/۹۸۷×۱۰$^{-1}$	$y = 524.76x^3 - 38.416x^2 - 12.624x + 1.6187$	روش تفاضل مرکزی
۹/۹۸۹×۱۰$^{-1}$	$y = 22.644x^3 - 2.5426x^2 - 0.4742x + 0.0859$	روش جنینگز
۹/۹۹×۱۰$^{-1}$	$y = 1.3241x^3 + 0.3668x^2 - 0.106x + 0.0104$	روش ارتقا یافته جنینگز

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله روش شتاب مرتبه سوم با استفاده از توابع وزنی واحد، پتروگالرکین و کمترین مربعات بسط داده شد. این کار برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام شده است. سپس، یک سیستم یک درجه آزاد با فرکانس ۱ هرتز و میرایی‌های ۱،۲،۵،۱۰و۲۰ درصد با بارگذاری هارمونیک در نظر گرفته شد. فرکانس بارگذاری هارمونیک از ۰/۰۱ تا ۳ هرتز (با افزایش ۰/۰۱ هرتز) تغییر داده شد و پاسخ تحلیلی (دقیق) آن محاسبه گردید.

سپس با روش های عددی شتاب مرتبه سه، شتاب مرتبه دو، روش نیومارک (روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی، روش جنینگز و روش جنینگز ارتقا یافته پاسخ این سازه محاسبه شد و میزان خطای هر روش با استفاده از معیار جذر میانگین مربعات محاسبه گردید. این کار برای ده Δt انجام شد که کوچکترین آن مقدار ۰/۰۲ ثانیه و بزرگترین آن مقدار۰/۲۰ ثانیه بود. نتایج کار نشان داد که بیشترین کاهش خطا در روش شتاب مرتبه سه نسبت به روش شتاب مرتبه ۲، مربوط به میرایی ۱ درصد و Δt=۰/۲۰ ثانیه می-باشد. کمترین خطا برای تمام Δtها مربوط به روش جنینگز ارتقاء یافته بود. علت این امر ناشی از این موضوع است که در روش جنینگز و جینگز ارتقاء یافته برای سمت چپ تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت هیچ گونه تقریبی در نظر گرفته نمی-شود و در سمت راست تساوی معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که مربوط به بارگذاری است فرض تغییرات خطی شتاب برای روش جنینگز و در روش جنینگز ارتقا یافته از منحنی‌های اسپیلاین مکعبی که پیوستگی شیب و مشتق دوم در نقاط اتصال رعایت می‌شود، استفاده می‌شود. در روش‌های دیگر عددی تقریباتی برای شتاب در نظر گرفته می‌شود. مثلا در روش نیومارک (روش شتاب متوسط) مقدار شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود. یا در روش شتاب مرتبه سه که موضوع این مقاله می‌باشد، فرض می‌گردد که تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ می‌باشد که این فرضیات، می‌تواند بر واقعیات امر منطبق نباشد و در نتیجه باعث خطای قابل توجه می‌گردد.

با توجه به اینکه تحلیل برای ده گام زمانی و پنج میرایی انجام شد، در نتیجه هر روش شامل پنجاه میانگین خطا می‌گردید که با میانگین‌گیری از این پنجاه میانگین خطا،میانگین میانگین خطاها به دست آمد که کمترین آنها مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته و بیشترین آنها مربوط به روش تفاضل مرکزی می‌گردید. روش جنینگز و روش شتاب مرتبه ۳ ، حدودا یک میزان خطا داشتند که نسبت خطای آنها به خطای حداقل، حدود ۸/۸ بود.

در پایان، روند تغییرات خطا بر حسب گام زمانی و میرایی بررسی گردید و روابطی به صورت چندجمله‌ای‌های درجه ۳ پیشنهاد گردید که همبستگی مناسبی با مقادیر واقعی‌شان داشتند.

پیشنهاد می گردد در ادامه‌ی این تحقیقات، سیستم های چند درجه آزاد خطی و نیز سیستم های غیر خطی نیز با این روش های عددی، مورد بررسی قرار گیرند و میزان خطای این روش ها در این موارد نیز بررسی گردند.

فهرست علائم

m	جرم سیستم یک درجه آزاد
n	تعداد بازه‌ها
C	ضریب میرایی
K	ضریب سختی فنر
u و y	جابجایی مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
$\dot{u}$ و $\dot{y}$	سرعت مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
$\ddot{u}$ و $\ddot{y}$	شتاب مطلق یا نسبی جرم سیستم یک درجه آزاد
t, τ	متغیر زمان
$p(t)$	نیروی تحریک کننده سیستم یک درجه آزاد
p_o	دامنه نیروی تحریک کننده سینوسی
ω	فرکانس زاویه‌ای بار سینوسی
ω_n	فرکانس زاویه‌ای طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد
T_n	د وره تناوب ارتعاش طبیعی نامیرای سیستم یک درجه آزاد
ω_D	فرکانس زاویه‌ای طبیعی میرای سیستم یک درجه آزاد
ζ	نسبت میرایی سیستم یک درجه آزاد
$\Delta t, \Delta t_i$	گام زمانی

سپاسگزاری

مراجع

[1] A. A. Gholampour, M. Ghasemiye, H. Fallahnejad, “Direct Time Integration Method for Nonlinear Structural Problems,” *Proceedings of the 6th National Congress on Civil Engineering*, Iran, Semnan, Semnan University, [Spring 2011].

[2] S. Y.Chang, “Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method,” *Journal of Mechanics*,

vol. 25, no. 3, pp 289-297, 2009.

[3] M. Mahmoudabadi, B. Taghavi, S. M. R. Hassani, S. M. J. Hosseini, "*Improvement of the Linear Interpolation Method of Excitation Using the Spline Interpolation Function to Numerically Calculate the Response Coefficient of Linear One-Degree-Of-Freedom Systems*," *Bulletin of Earthquake Science and Engineering*,Volume 10, Issue 4, Pages 121-133, [March 2024]: (in Persian).

[4] M. Mahmoodabadi, S. M. J. Hosseini, "Comparison nonlinear response spectra of elastoplastic systems resulting from two excitation interpolation methods," *Ferdowsi Civil Engineering Journal*, vol. 36, no. 4 , pp. 21-34, [winter 2024].

[5] A. K. Chopra, "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rd ed," *Prentice-Hall, Upper Saddle River*, New Jersey,2007.